

非正則・指数型 Riemann ゼータ母関数の積分表示

○ 野田 工 (日大工・総合)

1. 概要

指数型 Riemann ゼータ母関数として一次分数パラメータの指数関数を係数にもつゼータ関数を導入し積分表示, 変換公式, 関数関係式を示した [No](下記 定理 1). このゼータ関数について非正則版の変換公式 (定理 2) がテータ変換公式から導かれることを示す.

2. 定義

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1$ そして s を複素変数とする. 我々の主対象は次の Dirichlet 級数である:

$$\zeta_{\text{exp.I}}(s; \lambda; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda/(n+z)\}}{(n+z)^s}. \quad (1)$$

$$\zeta_{\text{exp.II}}(s; \lambda; z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda/|n+z|)}{|n+z|^s}. \quad (2)$$

ここで (2) において $z \notin \mathbb{Z}$ とする. 上記 Dirichlet 級数 (1), (2) は領域 $\operatorname{Re}(s) > 1$ において絶対収束する.

以下 $K_\nu(z)$ は変形 Bessel 関数とし, $\Gamma(s)$ は Gamma 関数, $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数とし, $\int_{\infty e^{i\theta}}^{(0+)}$ は $\infty e^{i\theta}$ を始点とする Hankel 路を表す.

3. 正則型母関数の積分表示・関数関係式

定理 1 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi/2$ そして $0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1$ を仮定する. Dirichlet 級数 $\zeta_{\text{exp}}(s; \lambda; z)$ は積分表示

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{exp.I}}(s; \lambda; z) &= \lambda^{1-s} \Gamma(s-1) \\ &+ \frac{\lambda^{-s}}{\pi i} \int_{\infty e^{i\theta}}^{(0+)} \frac{u^{(s-1)/2} e^{zu/\lambda}}{1 - e^{u/\lambda}} K_{s-1}(2\sqrt{u}) du \end{aligned}$$

をもつ. ここで θ は $\pi/2 - \min\{0, \arg z\} < \theta - \arg \lambda < 3\pi/2 - \max\{0, \arg z\}$ なる条件を満たすようにとる. これにより $s \in \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ を除いて全 s -平面に解析接続される.

さらに $z \in \mathbb{R}$, $0 < z \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, の仮定の下で変換公式 (関数等式)

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{exp.I}}(s; \lambda; z) &= \lambda^{1-s} \Gamma(s-1) \\ &+ 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} (2\pi i n / \lambda)^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi i z n} K_{s-1}(2\sqrt{2\pi i n \lambda}). \end{aligned} \quad (3)$$

が成立する.

4. 非正則型母関数の変換公式

定理 2 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi/2$, $z \notin \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ を仮定する. Dirichlet 級数 $\zeta_{\text{exp.II}}(s; \lambda; z)$ は次の変換公式をもつ.

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{exp.II}}(s; \lambda; z) &= \frac{\lambda^{-s}}{\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \\ &\times \int_{\infty e^{i\theta}}^{(0+)} \frac{u^{(s-1)/2}}{\sqrt{-u/\lambda}} e^{\frac{uy^2}{\lambda} + \frac{\pi n^2 \lambda}{u}} K_{s-1}(2\sqrt{u}) du. \end{aligned}$$

これにより全 s -平面に解析接続される.

注意 上記定理 2 は次のテータ変換公式から従う.

定理 3 (Theta transformation formula) (cf. [Kn] p.40) 任意の $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} t > 0$ に対して次の変換公式が成立する.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+z)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{t} + 2\pi i n z}.$$

4. 参考文献

[Kn] M. I. Knopp, *Modular Functions in Analytic Number Theory*, Markham Pub. Co. Chicago (1970)

[No] T. Noda, *The exponential type generating function of the Riemann zeta-function revisited*, preprint