非可換空間上のヤン-ミルズ理論における holographic complexity

○ 中島唯仁 (日大工・総合)

1. はじめに

素粒子の基本的な相互作用として、電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用及び重力相互作用の 4 つが知られている。前者 3 つの相互作用は、ゲージ粒子により媒介される相互作用であり、これらはゲージ理論 (ゲージ場の量子論) に基づいて定式化されている。さらに重力を含めた 4 つの基本相互作用を統一的に定式化する試みとして、相互作用を媒介する粒子、及び物質を構成する粒子を紐だと考える弦理論が提唱されている。弦理論は実験により検証されるまでには至っていないが、その研究を通じてゲージ理論や重力理論の発展に多大な貢献を果たしている。一方、一様な背景磁場が存在する場合の弦理論を考えると、その低エネルギー有効理論として、以下に述べる非可換空間上のゲージ理論が自然に現れることが明らかにされている

2. 非可換空間上のゲージ理論

通常の空間における座標は実数で表されるため、2 つの座標 x と y との積に関して可換、すなわち $xy = yx$ が成立する。ここで述べる非可換空間とは、座標 x と y との積に関して、次の交換関係が成立する空間 (モイヤル空間) である。

$$[x,\, y]_* \,(= x * y - y * x) = i\theta \neq 0$$

ここに i は虚数単位、$*$ はモイヤル積、θ は非可換パラメーターとよばれる定数である。空間座標はその積に対して可換でない。しかしながら $\theta \to 0$ の極限においてこの空間は通常の空間に帰着するという意味で、この空間は一般化された空間とみなすことができる。モイヤル積により特徴付けられるこのような非可換性は、例えば量子ホール系での電子の中心座標の交換関係においても見出すことができる。この空間上のゲージ理論は、ゲージ理論が内包する紫外発散 (短距離において無限個の自由度が励起されることにより、質量や電荷等が無限大になる) の問題を緩和する等、弦理論のもつ非局所的な性質を引き継いだ非常に有望な理論であることが知られている。このためこの理論の量子論的な様相を明らかにすべく、様々な観点からの研究がなされている。しかしこの理論は摂動論に基づく伝統的な解析手法の適用が困難であり、この理論の量子論的な様相における十分な理解には至っていない。

3. ゲージ理論と重力理論の双対性

最近の弦理論の研究において、ゲージ理論と重力理論との間に密接な関係があることが明らかにされている。弦理論におけるソリトン解として知られる D ブレーンは、その低エネルギー有効理論としてゲージ理論に基づく記述と、重力理論に基づく記述とが存在する。そのゲージ理論の強結合 (相互作用が強い) 領域と重力理論の弱結合 (相互作用が弱い) 領域では、ある極限のもとで対応関係 (双対性) があることが見出されており、この対応関係をゲージ・重力対応という ゲージ・重力対応は、メソンやバリオンの質量スペクトルの解析やクォークの閉じ込め相の解析等、摂動論に基づいた解析手法が適用できない強結合領域におけるケージ理論の解析等に応用され、目覚ましいを発展を遂げている。

4. 非可換空間上のヤン-ミルズ理論における “複雑さ”(quantum complexity)

ある量子状態 $|\psi\rangle$ における “複雑さ”(quantum complexity) とは、基準となる状態から状態 $|\psi\rangle$ への変換に必要となる 2 量子ビット上の量子ゲートの最小数として定義される。大まかにいえば、“複雑さ”とは、系から情報を取り出す際の難易度を示す指標と捉えることができる。実際、ブラックホールにおける情報パラドックス問題を理解する過程において、“複雑さ”という概念の重要性が認識されつつある。このような背景の下に、最近 L. Susskind らは、この “複雑さ”をゲージ・重力対応の枠組みから評価する conjecture を提唱した。その 1 つに依れば、部分系の “複雑さ” は、以下に示される量から評価される [1]。

$$\mathcal{C}_A = \frac{V(\gamma)}{8\pi R G_N}$$

ここに G_N はニュートン定数、$V(\gamma)$ は系 A の境界と一致する境界をもつ漸近的 AdS (反ドジッター) 時空内部の極小曲面 γ に囲まれた部分の体積、R は AdS 時空の曲率半径を表す。この定義に基づく “複雑さ”は (体積が発散することから) 発散しているので、正則化 (regularization) が必要である。その際、例えばカットオフを導入した正則化を行った場合には、その正則化において、カットオフに依らない普遍的な量を導き出せるかが重要となる。非可換空間上のヤン・ミルズ理論における “複雑さ”を、上記の処方箋に基づいて評価するにあたり、ここでは、系が有限の幅 l を有し無限に伸びた帯状の領域を考える。このとき、系の “複雑さ” $\mathcal{C}_A$ を、系の長さパラメーター l の関数として評価することができる。系の非可換を特徴付ける非可換パラメーターが大きい極限を考えると、この評価を解析的に行うことができる。

$$\mathcal{C}_A^{\rm reg} \propto l^4$$

ここに $\mathcal{C}_A^{\rm reg}$ は正則化の方法に依らない “複雑さ”の普遍的な量を表す。一方、通常の可換空間におけるラージ N ヤン・ミルズ理論における “複雑さ” $\mathcal{C}_A^{\rm reg}$ の l 依存性は、$\mathcal{C}_A^{\rm reg} \propto l^{-2}$ となる [2]。このように空間の非可換性は系の “複雑さ” の l 依存性を変更し得ることが確かめられた。実際、空間の非可換性は、“複雑さ” の示す劣加法性 (subadditivity) 等の性質に影響を与える。

系の非可換パラメーターの値が任意の場合には、“複雑さ” $\mathcal{C}_A$ の l 依存性を、数値計算により評価することができる。その結果を図 1 に示す。

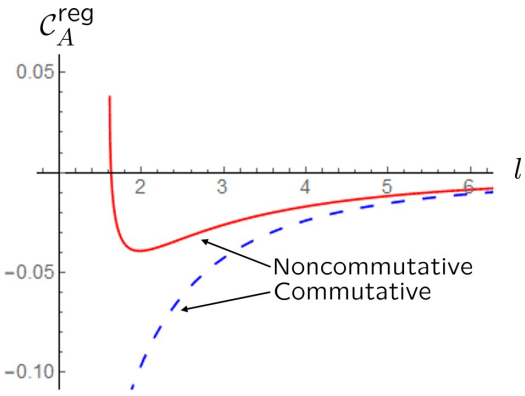

図 1 “複雑さ” $\mathcal{C}_A^{\rm reg}$ のスケール l 依存性

ここに実線は非可換空間上の場合を、点線は通常の可換空間上の場合を表す。l が大きい領域では、両者の振舞いに差異はないが、l が小さい領域では、両者の振舞いに大きな差異が生ずる。特に l が小さい領域において、非可換空間上のゲージ理論における “複雑さ” $\mathcal{C}_A^{\rm reg}$ が増大に転じる様は、この理論における普遍的な性質の一つである 紫外-赤外混合現象 (UV/IR mixing) として理解することができる。我々はさらに “複雑さ” の温度依存性等についても調べた。本講演ではその結果も含めて報告する。

参考文献

[1] L. Susskind, Fortsch. Phys. **64**, 24 (2016); D. Stanford and L. Susskind, Phys. Rev. D **90**, 126007 (2014).

[2] M. Alishahiha, Phys. Rev. D **92**, 126009 (2015); O. Ben-Ami and D. Carmi, JHEP **11**, 129 (2016).